Exercice 1 (*Equation d'une courbe*)

Une courbe est dite rationnelle si elle admet un paramétrage $t \mapsto (x(t), y(t))$ où x et t sont des fracations rationnelles. On peut obtenir une équation de la courbe en éliminant t.

1. Représenter la courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t(t^2-1) \\ y(t) & = & (t^2+1) \end{array}\right.$$

   En déterminer une équation cartésienne.

2. Représenter la courbe paramétrée

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2t/(t^2+1) \\ y(t) & = & (1-t^2)/(t^2+1) \end{array}\right.$$

   En déterminer une équation cartésienne.

Exercice 2 (*Intersection de courbes*)

Soient C la courbe d'équation $xy = 4$ et D la courbe d'équation $y = (x-3)(x^2-16)$.

1. Combien de points d'intersection voit-on ? Comparer avec le résultat donné par le théorème de Bezout.
2. Déterminer une équation polynomiale vérifiée par les abscisses de $C \cap D$ et de même déterminer une équation polynomiale vérifiée par lesordonnées de $C \cap D$.
3. Résoudre ces équations numériquement et situer les points. Déterminer leurs multiplicités.

Mêmes questions avec C la courbe d'équation $(x-2)^2 + y^2 = 4$ et D la courbe d'équation $y = (x-3)(x^2-16)$. (Ici, on peut résoudre exactement.)

Exercice 3

La *fenêtre de Viviani* est l'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du cylindre d'équation $x^2 - x + y^2 = 0$. Expliciter et reconnaître ses projections sur les plans des coordonnées (éliminez une variable et étudiez la courbe obtenue).

Exercice 4 (*Démonstration géométrique*)

On se propose de démontrer *la formule de Héron* qui donne l'expression de l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses côtés.

Un triangle $\mathcal{T}$ est d'aire S, de longueurs des côtés a, b, c etd e sommets $A, B,$. On choisit un repère de façon à avoir : $A(0,0), B = (0, b), C = (x, y)$.

1. Faites un dessin.

2. Justifier : $2S = cy$, $x^2 + y^2 = b^2$, $(c - x)^2 + y^2 = a^2$.

3. Démontrer la formule de Héron en éliminant dans ce système x et y.

$$S^2 = \frac{1}{16}(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a).$$

4. Applications de cette formule ?

5. Généralisation à un quadrilatère.

Exercice 5 (*groupe associé à une cubique*)

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit $P = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 3 et soit C_P la courbe associée d'équation $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ (pour simplifier). On suppose la courbe "lisse", c'est-à-dire que les "points critiques" de $F(x, y) = y^2 - (x^3 + ax^2 + bx + c)$ ne sont pas sur la courbe (i.e. ($\partial_x F = 0$ et $\partial_y F = 0$ et $F = 0$ n'a pas de solution)$>$.

1. Donner un critère effectif de la lissité ou non de la courbe.

2. Soient u et v deux points de C_P distincts. Justifier que la droite passant par u et par v rencontre la courbe en un troisième point w.

3. Soit u un point de C_P. Justifier que la tangente passant par u rencontre la courbe en un autre point w.

On munit alors C_P d'une loi interne en posant $u+v+w = 0$. On ajoute un point ω comme élément neutre, il correspond à un point à l'infini dans la direction Oy.

3. Expliquer comment on peut décrire la loi. Et comment on pourrait vérifier l'associativité d'une telle loi...

4. Vérifier qu'on munit ainsi la courbe à laquelle on a ajouté Ω d'une loi de groupe abélien. Quel est l'inverse d'un point de coordonnées (x_0, y_0) ?

5. Lorsque k est un corps fini, majorer l'ordre de ce groupe. le calculer dans le cas où $P = x^3 + 3x - 1$ et $k = \mathbb{F}_7$.

6. Etudier le cas où $P = x^3 - 25x$ et $k = \mathbb{Q}$. On commencera par étudier les points $p_1 = (0, 0), p_2 = (5, 0)$ (de torsion) et $g = (-4, 6)$. On démontre que le groupe est $< g, p_1, p_2 >\sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.