TD 5 – Automates à pile et algébricité

1 Automates à pile (« pushdown automata »)

Exercice 1. Pour chacun des langages suivants, donner un automate à pile (AP) le reconnaissant.

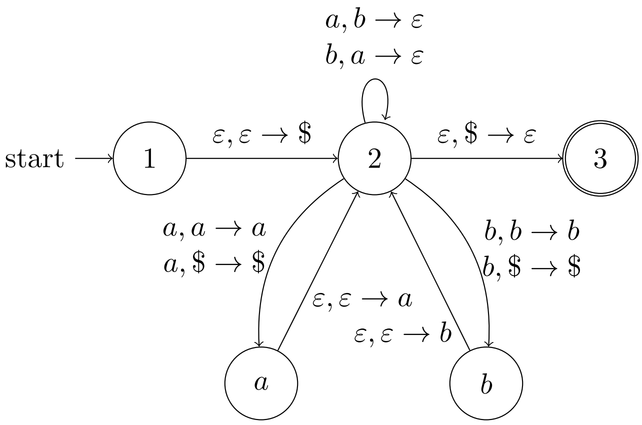
1. $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$.
2. $\{va^n \mid v \in \{a,b\}^* \wedge |v|_a = n\}$.
3. $\{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^{\mathcal{R}}\}$ (langage des palindromes sur $\{a,b\}$).
4. $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \neq w^{\mathcal{R}}\}$ (langage des non palindromes sur $\{a,b\}$).
5. Pour $k \in \mathbb{N}_{>0}$ fixé, le langage des mots sur $A_k = \{a_1, \ldots, a_k, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k\}$ engendré par la grammaire algébrique $\mathcal{G} = (\{S,T\}, A_k, R, S)$ où R contient les règles :

$$\begin{aligned} S &\to TS \mid \varepsilon \\ T &\to a_1 S \bar{a}_1 \mid \cdots \mid a_k S \bar{a}_k \ . \end{aligned}$$

(C'est le *langage de Dyck* des mots bien parenthésés avec k types de parenthèses.)

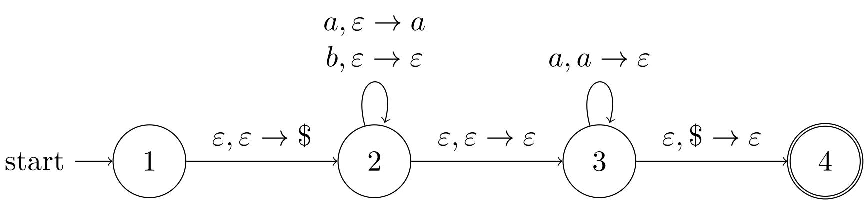
Solution 1.

1. On construit l'AP suivant :



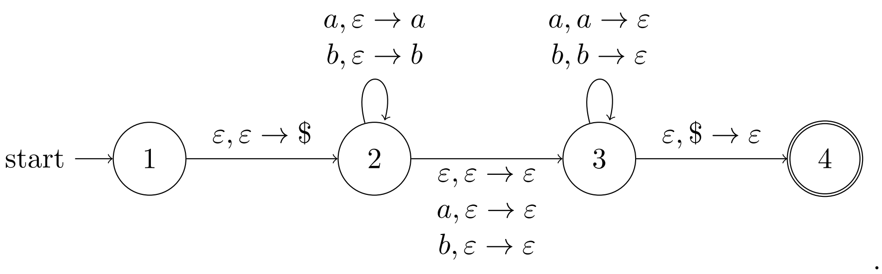
.

2. On construit l'AP suivant :

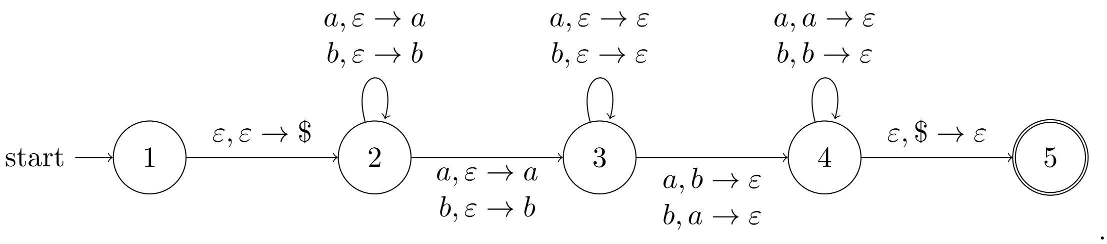


.

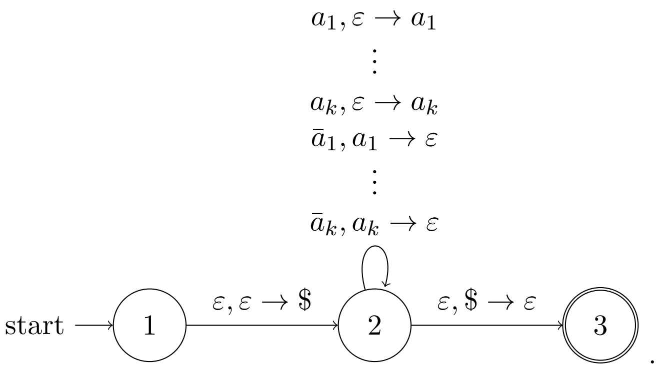
3. On construit l'AP suivant :



4. On construit l'AP suivant :



5. On construit l'AP suivant :



Exercice 2. Soit Σ un alphabet. Montrer que pour tous L, K langages sur Σ tels que L est rationnel et K est algébrique, $L \cap K$ est aussi un langage algébrique sur Σ.

Solution 2. Soit $\mathcal{A} = (Q_L, \Sigma, \delta_L, q_{L,0}, F_L)$ un AFD reconnaissant L et $\mathcal{P} = (Q_K, \Sigma, \Gamma, \delta_K, q_{K,0}, F_K)$ un AP reconnaissant K.

On construit l'AP $\mathcal{P}' = (Q_L \times Q_K, \Sigma, \Gamma, \delta', (q_{L,0}, q_{K,0}), F_L \times F_K)$ où $\delta' \colon (Q_L \times Q_K) \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathfrak{P}((Q_L \times Q_K) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}))$ est telle que pour tous $q_L \in Q_L$, $q_K \in Q_K$, $a \in \Sigma$ et $b \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$,

$$\delta'((q_L, q_K), a, b) = \left\{ \big((p, \delta_L(q_K, a)), c\big) \;\middle|\; (p, c) \in \delta_K(q_K, a, b) \right\}$$

et

$$\delta'((q_L, q_K), \varepsilon, b) = \{((p, q_K), c) \mid (p, c) \in \delta_K(q_K, \varepsilon, b)\} \ .$$

On peut montrer que $\mathcal{P}'$ reconnaît $L \cap K$.

2 Algébricité

Exercice 3. Montrer que le langage $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas algébrique.

Solution 3. Si ce langage était algébrique, d'après le lemme de pompage, pour p suffisamment grand, on aurait que $a^pb^pc^p$ dans le langage se décomposerait comme $a^pb^pc^p = uvxyz$ avec $vy \neq \varepsilon$, $|vxy| \leq p$ et uv^ixy^iz dans le langage pour tout i. On aurait donc que vy contient au plus deux lettres différentes, ce qui impliquerait que le mot uxz ne contenant pas le même nombre de a, de b et de c est dans le langage.

Exercice 4. En déduire que la classe des langages algébriques n'est close ni par intersection, ni par complémentation.

Solution 4. On peut montrer que les langages $\{a^nb^nc^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ et $\{a^mb^nc^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ sont tous les deux algébriques. Or, leur intersection est égale à $\{a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, qui n'est pas un langage algébrique par ce qui a été montré dans l'exercice précédent.

Comme vu dans la feuille de TD précédente, le langage $\{a^ib^jc^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, i \neq j \vee j \neq k\}$ est algébrique. On montre que son complémentaire n'est pas algébrique, parce que s'il l'était, alors son intersection avec le langage rationnel $\mathcal{L}(a^*b^*c^*)$, qui est égale à $\{a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, serait elle aussi algébrique.

Exercice 5. Montrer que les langages suivants ne sont pas algébriques.

1. $\{a^nb^nc^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \leq 2n\}$.
2. $\{a^ib^jc^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, i < j < k\}$.
3. $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $\{a^{P(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ pour P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{N}$ de degré au moins 2.
5. $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.
6. $\{w\#w \mid w \in \{a, b\}^*\}$.
7. $\{w\#w' \mid w, w' \in \{a, b\}^*, |w| = |w'| \wedge w \neq w'\}$.

Solution 5.

1. Si ce langage était algébrique, d'après le lemme de pompage, pour p suffisamment grand, on aurait que $a^pb^pc^{2p}$ dans le langage se décomposerait comme $a^pb^pc^{2p} = uvxyz$ avec $vy \neq \varepsilon$, $|vxy| \leq p$ et uv^ixy^iz dans le langage pour tout i. On aurait donc que
   — soit vy contient uniquement des a ou des b, ce qui impliquerait que le mot uxz contenant soit un nombre de a et de b différent, soit un nombre $p' < p$ de a et b tel que $2p' < 2p$ est dans le langage ;
   — soit vy contient uniquement des b ou des c, ce qui impliquerait que le mot uv^2xy^2z contenant un nombre de b strictement supérieur au nombre n de a ou un nombre de c strictement supérieur à $2n$ est dans le langage.
2. Si ce langage était algébrique, d'après le lemme de pompage, pour p suffisamment grand, on aurait que $a^pb^{p+1}c^{p+2}$ dans le langage se décomposerait comme $a^pb^{p+1}c^{p+2} = uvxyz$ avec $vy \neq \varepsilon$, $|vxy| \leq p$ et uv^ixy^iz dans le langage pour tout i. On aurait donc que
   — soit vy contient au moins un a mais pas de c, ce qui impliquerait que le mot uv^3xy^3z contenant strictement au moins autant de a que de c est dans le langage ;
   — soit vy contient au moins un b mais pas de a, ce qui impliquerait que le mot uxz contenant au plus autant de b que de a est dans le langage ;
   — soit vy contient uniquement des c, ce qui impliquerait que le mot uxz contenant au plus aurant de c que de b est dans le langage.
3. Si ce langage était algébrique, d'après le lemme de pompage, pour p suffisamment grand, on aurait que a^{2^p} dans le langage se décomposerait comme $a^{2^p} = uvxyz$ avec $vy \neq \varepsilon$, $|vxy| \leq p$ et uv^ixy^iz dans le langage pour tout i. On aurait donc $vy = a^d$ avec $0 < d \leq p$, ce qui impliquerait que $uv^2xy^2z = a^{2^p+d}$ est dans le langage, sachant que $2^{p+1} - 2^p = 2^p > p \geq d$.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$ le degré de P. Si ce langage était algébrique, d'après le lemme de pompage, pour p suffisamment grand, on aurait que $a^{P(p)}$ dans le langage se décomposerait comme $a^{P(p)} = uvxyz$ avec $vy \neq \varepsilon$, $|vxy| \leq p$ et uv^ixy^iz dans le langage pour tout i. On aurait donc $vy = a^d$

avec $0 < d \leq p$, ce qui impliquerait que $uv^2xy^2z = a^{P(p)+d}$ est dans le langage, sachant que $P(p+1) - P(p) > p \geq d$.

5. Si ce langage était algébrique, d'après le lemme de pompage, pour p suffisamment grand, on aurait que $a^pb^pa^pb^p$ dans le langage se décomposerait comme $a^pb^pa^pb^p = uvxyz$ avec $vy \neq \varepsilon$, $|vxy| \leq p$ et uv^ixy^iz dans le langage pour tout i. On aurait donc que
   — soit vxy est un facteur du premier bloc a^pb^p, ce qui impliquerait que le mot uxz dans le langage est soit de longueur impaire, soit vérifie que la première moitié du mot se termine par un a alors que la seconde moitié du mot se termine par un b ;
   — soit vxy est un facteur du bloc central b^pa^p, ce qui impliquerait que le mot uxz dans le langage est soit de longueur impaire, soit vérifie que la première moitié du mot se termine par un a alors que la seconde moitié du mot se termine par un b, soit vérifie que la seconde moitié du mot commence par un b alors que la première moitié du mot commence par un a, soit est égal à $a^pb^da^db^p$ où $d < p$;
   — soit vxy est un facteur du second bloc a^pb^p, ce qui impliquerait que le mot uxz dans le langage est soit de longueur impaire, soit vérifie que la seconde moitié du mot commence par un b alors que la première moitié du mot commence par un a.
6. Similaire au précédent.
7. Si ce langage était algébrique, d'après le lemme de pompage, pour p suffisamment grand, on aurait que $a^{p!+p}b^p\#a^pb^{p!+p}$ dans le langage se décomposerait comme $a^{p!+p}b^p\#a^pb^{p!+p} = uvxyz$ avec $vy \neq \varepsilon$, $|vxy| \leq p$ et uv^ixy^iz dans le langage pour tout i. On aurait donc que
   — soit vxy est un facteur du premier bloc $a^{p!+p}b^p$, ce qui impliquerait que le mot uxz dans le langage contient un bloc à gauche de # moins long que le bloc à droite de # ;
   — soit vxy est un facteur du bloc central $b^p\#a^p$ contenant #, ce qui impliquerait soit que le mot uxz dans le langage ne contient pas #, soit que $v = b^i$, $x = b^j\#a^k$ et $y = a^l$ et que donc, ou $i \neq l$ et donc le mot uxz dans le langage contient un bloc à gauche de # de longueur différente de celle du bloc à droite de #, ou $i = l$ et donc le mot $a^{p!+p}b^{p!+p}\#a^{p!+p}b^{p!+p} = uv^{p!/i+1}xy^{p!/i+1}z$ est dans le langage ;
   — soit vxy est un facteur du second bloc $a^pb^{p!+p}$, ce qui impliquerait que le mot uxz dans le langage contient un bloc à droite de # moins long que le bloc à gauche de #.

3 Limitations du lemme de pompage et lemme d'Ogden

Soit $K = \{a^ib^jc^kd^l \mid i,j,k,l \in \mathbb{N}, i = 0 \vee j = k = l\}$ un langage sur $\{a,b,c,d\}$.

Exercice 6. Montrer que K vérifie le lemme de pompage.

Solution 6. Soit $p = 1$. Soit $s \in K$ tel que $|s| \geq 1$.

Si $s = b^jc^kd^l$ pour $j,k,l \in \mathbb{N}$, alors en décomposant s comme $s = uvxyz$ avec $u = x = y = \varepsilon$, v étant égal à la première lettre de s et z étant égal au reste, on a nécessairement que $vy \neq \varepsilon$, $|vxy| \leq 1 = p$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $uv^mxy^mz \in K$, puisqu'il est toujours nécessairement de la forme $b^{j'}c^{k'}d^{l'}$ pour $j',k',l' \in \mathbb{N}$.

Sinon, si $s = a^ib^jc^jd^j$ pour $i \in \mathbb{N}_{>0}$, $j \in \mathbb{N}$, alors en décomposant s comme $s = uvxyz$ avec $u = x = y = \varepsilon$, $v = a$ et $z = a^{i-1}b^jc^jd^j$, on a nécessairement que $vy \neq \varepsilon$, $|vxy| \leq 1 = p$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $uv^mxy^mz = a^ma^{i-1}b^jc^jd^j \in K$.

On a donc que K vérifie le lemme de pompage pour $p = 1$.

Soit le lemme suivant, que l'on admettra dans un premier temps.

Lemme 3.1 (Ogden)**.** *Soit L un langage algébrique sur un alphabet Σ. Il existe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que pour tout $s \in L$ avec $|s| \geq n$ et tout sous-ensemble $D \subseteq [\![1, |s|]\!]$ d'au moins n positions dans s dites distinguées, il est possible de décomposer s comme $s = uvxyz$ avec $u,v,x,y,z \in \Sigma^*$ de telle façon que :*

1. *au moins l'une des lettres dans le facteur v ou y corresponde à une position distinguée ;*
2. *le facteur vxy contienne au plus n lettres correspondant à des positions distinguées ;*
3. *pour tout $i \in \mathbb{N}$, $uv^ixy^iz \in L$.*

Exercice 7. L'utiliser pour montrer que K n'est pas algébrique.

Solution 7. Si K était algébrique, d'après le lemme d'Ogden, pour p suffisamment grand, on aurait que $ab^pc^pd^p \in K$, où toutes les positions en-dehors de la première seraient distinguées, se décomposerait comme $ab^pc^pd^p = uvxyz$ avec vy contenant au moins une lettre de $\{b, c, d\}$, vxy contenant au plus p lettres de $\{b, c, d\}$ et $uv^ixy^iz \in K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. On aurait donc que vy contient au plus deux lettres différentes de $\{b, c, d\}$, ce qui impliquerait que le mot uv^2xy^2z, commençant par un a mais ne contenant pas le même nombre de b, de c et de d est dans K.

Exercice 8. Prouver le lemme d'Ogden.

Solution 8. Soit $\mathcal{G} = (V, \Sigma, R, S)$ une grammaire algébrique engendrant L. On note $b = \max\{|v| \mid (X \to v) \in R\}$.

Si $b \leq 1$, le résultat s'obtient trivialement.

Autrement, $b \geq 2$. On peut montrer que pour tout arbre de dérivation T de $\mathcal{G}$, dont la racine est étiquetée par un symbole quelconque de V et dont on a distingué un sous-ensemble D de ses feuilles, on a que pour tout $h \in \mathbb{N}$, si $b^h < |D|$, alors il existe un sous-arbre de dérivation T' de T avec D' l'ensemble des feuilles distinguées obtenu en restreignant D à T' vérifiant $b^h < |D'| \leq b^{h+1}$. (On montre ceci par récurrence sur la profondeur de T, en observant qu'il existe nécessairement un des sous-arbres fils de T ayant au moins $\frac{|D|}{b}$ feuilles distinguées.)

Étant donné un mot $s \in L$ avec $|s| \geq b^{|V|+1}$ et un sous-ensemble d'au moins $b^{|V|+1}$ positions disinguées dans s, on a un arbre de dérivation T pour s dans $\mathcal{G}$ dont la racine est étiquetée par S et ayant un sous-ensemble D de feuilles distinguées de cardinal au moins $b^{|V|+1}$. D'après le résultat précédent, on peut donc construire une suite de sous-arbres de dérivation $T_0, \ldots, T_{|V|}$ de T ayant pour ensemble de feuilles distinguées $D_0, \ldots, D_{|V|}$ respectivement tels que T_i soit sous-arbre strict de T_{i+1} pour tout $i \in [\![0, |V| - 1]\!]$ et $b^i < |D_i| \leq b^{i+1}$ pour tout $i \in [\![0, |V|]\!]$. Il doit donc exister $i, j \in [\![0, |V|]\!], i < j$ tels que T_i et T_j aient la même racine. Si on note $x \in \Sigma^*$ le mot dérivé par T_i et vxy avec $v, y \in \Sigma^*$ le mot dérivé par T_j (qui est tel, puisque x est nécessairement un facteur du mot dérivé par T_j), on a que s se décompose comme $s = uvxyz$ avec $u, z \in \Sigma^*$. Il est direct de vérifier que, par construction, cette décomposition vérifie les conditions du lemme d'Ogden.