TD 5 – Automates à pile et algébricité

1 Automates à pile (« pushdown automata »)

Exercice 1. Pour chacun des langages suivants, donner un automate à pile (AP) le reconnaissant.

1. $\{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$.
2. $\{va^n \mid v \in \{a,b\}^* \wedge |v|_a = n\}$.
3. $\{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^{\mathcal{R}}\}$ (langage des palindromes sur $\{a,b\}$).
4. $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \neq w^{\mathcal{R}}\}$ (langage des non palindromes sur $\{a,b\}$).
5. Pour $k \in \mathbb{N}_{>0}$ fixé, le langage des mots sur $A_k = \{a_1, \ldots, a_k, \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k\}$ engendré par la grammaire algébrique $\mathcal{G} = (\{S,T\}, A_k, R, S)$ où R contient les règles :

$$\begin{aligned} &S \to TS \mid \varepsilon \\ &T \to a_1 S \bar{a}_1 \mid \cdots \mid a_k S \bar{a}_k \ . \end{aligned}$$

(C'est le *langage de Dyck* des mots bien parenthésés avec k types de parenthèses.)

Exercice 2. Soit Σ un alphabet. Montrer que pour tous L, K langages sur Σ tels que L est rationnel et K est algébrique, $L \cap K$ est aussi un langage algébrique sur Σ.

2 Algébricité

Exercice 3. Montrer que le langage $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas algébrique.

Exercice 4. En déduire que la classe des langages algébriques n'est close ni par intersection, ni par complémentation.

Exercice 5. Montrer que les langages suivants ne sont pas algébriques.

1. $\{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \leq m \leq 2n\}$.
2. $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, i < j < k\}$.
3. $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $\{a^{P(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ pour P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{N}$ de degré au moins 2.
5. $\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$.
6. $\{w\#w \mid w \in \{a,b\}^*\}$.
7. $\{w\#w' \mid w, w' \in \{a,b\}^*, |w| = |w'| \wedge w \neq w'\}$.

3 Limitations du lemme de pompage et lemme d'Ogden

Soit $K = \{a^i b^j c^k d^l \mid i, j, k, l \in \mathbb{N}, i = 0 \vee j = k = l\}$ un langage sur $\{a,b,c,d\}$.

Exercice 6. Montrer que K vérifie le lemme de pompage.

Soit le lemme suivant, que l'on admettra dans un premier temps.

Lemme 3.1 (Ogden)**.** *Soit L un langage algébrique sur un alphabet Σ. Il existe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que pour tout $s \in L$ avec $|s| \geq n$ et tout sous-ensemble $D \subseteq [\![1, |s|\,]\!]$ d'au moins n positions dans s dites distinguées, il est possible de décomposer s comme $s = uvxyz$ avec $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ de telle façon que :*

1. *au moins l'une des lettres dans le facteur v ou y corresponde à une position distinguée ;*
2. *le facteur vxy contienne au plus n lettres correspondant à des positions distinguées ;*
3. *pour tout $i \in \mathbb{N}$, $uv^ixy^iz \in L$.*

Exercice 7. L'utiliser pour montrer que K n'est pas algébrique.

Exercice 8. Prouver le lemme d'Ogden.