Langages formels, calculabilité et complexité **ENS Paris – A1S1 2019-2020**
21 novembre 2019 Nathan Grosshans

TD 8 – Indécidabilité, le retour

1 Décidabilité et grammaires algébriques

Soit Σ un alphabet. Étant donné $m \in \mathbb{N}_{>0}$ et une suite $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ de m mots sur Σ, on introduit un nouvel alphabet $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ disjoint de Σ et on définit

$$L_u = \{u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n} a_{i_n} \cdots a_{i_2} a_{i_1} \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \wedge \forall j \in [\![1, n]\!], i_j \in [\![1, m]\!]\} \ ,$$
$$L'_u = \{w a_{i_n} \cdots a_{i_2} a_{i_1} \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall j \in [\![1, n]\!], i_j \in [\![1, m]\!] \wedge w \in \Sigma^* \wedge w \neq u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n}\} \cup \{\varepsilon\} \ .$$

Exercice 1. Montrer que les langages ainsi définis sont algébriques (« context-free »).

Exercice 2. Montrer, en utilisant l'indécidabilité de PCP, que les langages suivants sont indécidables.

1. $\mathrm{DISJ}_{\mathrm{CFG}} = \{\langle \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \rangle \mid \mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont des grammaires algébriques et $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \emptyset\}$.
2. $\mathrm{EQ}_{\mathrm{CFG}} = \{\langle \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \rangle \mid \mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont des grammaires algébriques et $\mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)\}$.
3. $\mathrm{ALL}_{\mathrm{CFG}} = \{\langle \mathcal{G} \rangle \mid \mathcal{G}$ est une grammaire algébrique sur un alphabet Σ et $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \Sigma^*\}$.
4. $\mathrm{REG}_{\mathrm{CFG}} = \{\langle \mathcal{G} \rangle \mid \mathcal{G}$ est une grammaire algébrique et $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ est rationnel$\}$.
5. $\mathrm{IDEM}_{\mathrm{CFG}} = \{\langle \mathcal{G} \rangle \mid \mathcal{G}$ est une grammaire algébrique et $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})\mathcal{L}(\mathcal{G})\}$.

Exercice 3. Montrer que

1. $\{\langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle \mid \mathcal{G}$ est une grammaire algébrique, $\mathcal{A}$ est un AFD et $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G})\}$ est indécidable ;
2. $\{\langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle \mid \mathcal{G}$ est une grammaire algébrique, $\mathcal{A}$ est un AFD et $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})\}$ est décidable.

2 Séparabilité

Exercice 4. Soit Σ un alphabet. Soit A et B deux langages disjoints sur Σ. On dit qu'un langage C sur Σ *sépare A et B* lorsque $A \subseteq C$ et $B \subseteq \bar{C}$.

1. Si deux langages A et $\bar{A}$ sur Σ ne sont séparés par aucun langage décidable, que peut-on en déduire ?
2. Montrer que deux langages A et B sur Σ sont séparés par un langage décidable s'ils sont co-reconnaissables et disjoints.
3. Montrer qu'il existe des langages A et B sur Σ qui sont reconnaissables, mais ne sont séparés par aucun langage décidable.