TD 11 – Complexité en espace

1 NL = coNL

Nous allons ici montrer un cas particulier du théorème d'Immerman-Szelepcsényi, sachant que le cas général s'en déduit sans trop de difficultés.

Rappelons que le langage

$$\mathrm{PATH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ est un graphe orienté contenant un chemin du sommet } s \text{ au sommet } t\}$$

est NL-complet. Pour montrer que NL = coNL, nous allons montrer que $\overline{\mathrm{PATH}} \in \mathsf{NL}$, en suivant les étapes ci-dessous.

Exercice 1. Montrer qu'il existe une MTN $\mathcal{R}$ qui termine toujours et telle que, étant donné un graphe orienté $G = (V, A)$, deux sommets $s, t \in V$ et un entier $l \in \mathbb{N}, l < |V|$, fonctionne en espace logarithmique en $|\langle G\rangle|$ sur l'entrée $\langle G, s, t, l\rangle$ et a au moins un chemin acceptant sur cette entrée si et seulement s'il existe un chemin de s à t de longueur au plus l.

Étant donné un graphe orienté $G = (V, A)$ et un sommet $s \in V$, pour tout $l \in \mathbb{N}, l < |V|$, on dénote par $S_l(G, s)$ l'ensemble des sommets de G vers lesquels il existe un chemin de longueur au plus l depuis s. On dénote par $S(G, s)$ l'ensemble des sommets de G vers lesquels il existe un chemin depuis s.

Exercice 2. Montrer qu'il existe une MTN $\mathcal{R}'$ qui termine toujours et telle que, étant donné un graphe orienté $G = (V, A)$, deux sommets $s, t \in V$, un entier $l \in \mathbb{N}, l < |V| - 1$ et $S_l(G, s)$, fonctionne en espace logarithmique en $|\langle G\rangle|$ sur l'entrée $\langle G, s, t, l, |S_l(G, s)|\rangle$ et vérifie :

- qu'elle a au moins un chemin acceptant sur cette entrée ;
- que tout chemin acceptant termine avec 1 inscrit sur la bande de sortie s'il existe un chemin de s à t dans G de longueur au plus $l + 1$, 0 sinon.

Indication : D'abord supposer que $\mathcal{R}$ est déterministe, puis introduire un mécanisme de comptage pour vérifier que $\mathcal{R}$ n'a bien donné que des « bonnes réponses » de manière non déterministe.

Exercice 3. Montrer ensuite qu'il existe une MTN $\mathcal{C}$ qui termine toujours et telle que, étant donné un graphe orienté $G = (V, A)$, un sommet $s \in V$, un entier $l \in \mathbb{N}, l < |V| - 1$ et $S_l(G, s)$, fonctionne en espace logarithmique en $|\langle G\rangle|$ sur l'entrée $\langle G, s, l, |S_l(G, s)|\rangle$ et vérifie :

- qu'elle a au moins un chemin acceptant sur cette entrée ;
- que tout chemin acceptant termine avec $\langle\, |S_{l+1}(G, s)|\rangle$ inscrit sur la bande de sortie.

Exercice 4. En déduire qu'il existe une MTN $\mathcal{C}'$ qui termine toujours et telle que, étant donné un graphe orienté $G = (V, A)$ et un sommet $s \in V$, fonctionne en espace logarithmique en $|\langle G\rangle|$ sur l'entrée $\langle G, s\rangle$ et vérifie :

- qu'elle a au moins un chemin acceptant sur cette entrée ;
- que tout chemin acceptant termine avec $\langle\, |S(G, s)|\rangle$ inscrit sur la bande de sortie.

Exercice 5. Montrer, en utilisant $\mathcal{C}'$, que $\overline{\mathrm{PATH}} \in \mathsf{NL}$.

Exercice 6. En conclure que NL = coNL.

2 NL-complétude

Exercice 7.

1. Montrer que le langage

$$\mathrm{L}_{\mathrm{DFA}} = \{\langle \mathcal{A}, w\rangle \mid \mathcal{A} \text{ est un AFD sur un alphabet } \Sigma \text{ acceptant } w \in \Sigma^*\}$$

   est dans L.

2. Montrer que le langage

$$\mathrm{L}_{\mathrm{NFA}} = \{\langle \mathcal{A}, w\rangle \mid \mathcal{A} \text{ est un AFN sur un alphabet } \Sigma \text{ acceptant } w \in \Sigma^*\}$$

   est NL-complet.

Exercice 8. Montrer que 2-SAT est NL-complet.

Un *semi-groupe* est la donnée $(S, \star)$ d'un ensemble S et d'une loi de composition interne $\star \colon S \times S \to S$ tels que $\star$ est associative : $\forall x, y, z \in S, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.

Étant donné deux semi-groupes $(S, \star)$ et $(T, \diamond)$, on dit que $(T, \diamond)$ est un sous-semi-groupe de $(S, \star)$ lorsque $T \subseteq S$ et $\diamond = \star|_T$.

Enfin, pour un semi-groupe $(S, \star)$ et un sous-ensemble E donnés, on appellera le *sous-semi-groupe de* $(S, \star)$ *engendré par* E le plus petit sous-semi-groupe de $(S, \star)$ contenant E, relativement à l'inclusion.

Exercice 9. Montrer que le langage

$$\mathrm{SGEN} = \left\{ \langle S, \star, E, x\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} (S, \star) \text{ est un semi-groupe fini, } E \subseteq S \text{ et } x \in S \text{ appartient au} \\ \text{sous-semi-groupe de } (S, \star) \text{ engendré par } E \end{array} \right\}$$

est NL-complet.

3 PSPACE-complétude

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté et $s \in V$. Le *jeu de géographie* sur (G, s) est un jeu à deux joueurs fonctionnant de la manière suivante. Au début de la partie, un marqueur est placé sur le sommet s. Les joueurs jouent tour à tour, le joueur 1 commençant en premier ; à chaque tour, le joueur dont c'est le tour de jouer déplace le marqueur placé sur un sommet x sur un autre sommet y tel que $(x, y) \in A$ et que le marqueur n'ait jamais été placé sur y auparavant ; le premier joueur qui ne peut plus déplacer le marqueur perd, ce qui termine la partie.

Pour le joueur 1, une *stratégie* est une fonction qui à toute suite finie de choix légaux de sommets $(s, x_1, y_1, \dots, x_l, y_l)$ $(l \in \mathbb{N})$ sur lesquels est successivement placé le marqueur, sans que cette suite n'aboutisse à la fin de la partie, associe un nouveau sommet x_{l+1} tel que $(s, x_1, y_1, \dots, x_l, y_l, x_{l+1})$ soit une suite finie de choix légaux de sommets sur lesquels est successivement placé le marqueur. Le joueur 1 a une *stratégie gagnante* lorsqu'il existe une stratégie qui lui permet de gagner toute partie (c'est-à-dire, quels que soient les choix du joueur 2).

Exercice 10. Montrer que le langage

$$\mathrm{GEOGRAPHY} = \left\{ \langle G, s\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ est un graphe orienté et } s \text{ un de ses sommets tels que le joueur 1 a} \\ \text{une stratégie gagnante pour le jeu de géographie sur } (G, s) \end{array} \right\}$$

est PSPACE-complet.