TD 12 – Circuits

1 Classe AC

Un circuit booléen avec n bits d'entrée est un graphe orienté acyclique (DAG) où les feuilles sont les n nœuds représentant l'entrée, la sortie est l'unique nœud dont le degré sortant est nul et chaque nœud est soit un nœud $\wedge$ ou $\vee$ (qui peuvent être d'arité quelconque) soit un nœud $\neg$ (unaire). Étant donné un mot $w \in \{0,1\}^*$ de taille n et un circuit dont la taille d'entrée est n, on peut évaluer le circuit sur w en remplaçant la i-ème feuille d'entrée par $\top$ quand $w_i = 1$ et $\perp$ quand $w_i = 0$.

On dit qu'une *famille de circuits* $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ décide un langage $L \subseteq \{0,1\}^*$ lorsque pour chaque $n \in \mathbb{N}$, C_n a n bits d'entrée et décide $\{w \in L \mid |w| = n\}$.

On définit la classe AC^i comme la classe des langages sur $\{0,1\}$ décidés par une famille de circuits booléens $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dont la taille du circuit est polynomiale et dont la profondeur est en $\mathrm{O}(\log(n)^i)$, c'est à dire qu'il existe k tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la profondeur de C_n est majorée par $k \cdot \log(n)^i$. La taille de C_n est majorée par $P(n)$ pour P un certain polynôme.

Exercice 1. Justifier pourquoi l'on ne s'intéresse qu'aux circuits de taille polynomiale (et non pas exponentielle ou illimitée).

Exercice 2. Montrer que le langage $\text{PARITY} = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_1 = 1 \mod 2\}$ est dans AC^1.

Exercice 3. Montrer que le langage

$$\text{ADD} = \{abc \in \{0,1\}^* \mid |a| = |b| = |c|,\ a + b = c \text{ avec } a, b, c \text{ en binaire petit-boutiste}\}$$

est dans AC^0.

Exercice 4. Montrer que le langage

$$\text{MULT} = \{abc \in \{0,1\}^* \mid 2\,|a| = 2\,|b| = |c|,\ a \cdot b = c \text{ avec } a, b, c \text{ en binaire petit-boutiste}\}$$

est dans AC^1.

Exercice 5. Montrer que tout langage rationnel sur $\{0,1\}$ est dans AC^1.

2 Classe NC

On note NC^i la classe des langages sur $\{0,1\}$ décidés par une famille de circuits booléens $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où l'arité des portes $\vee$ et $\wedge$ est limitée à deux et où la famille de circuits est de profondeur $\mathrm{O}(\log(n)^i)$ avec une taille polynomiale.

Exercice 6. Montrer que pour tout i nous avons l'inclusion $\mathsf{NC}^\mathsf{i} \subseteq \mathsf{AC}^\mathsf{i} \subseteq \mathsf{NC}^{\mathsf{i+1}}$.

Exercice 7. Montrer que $\mathsf{NC}^0 \neq \mathsf{AC}^0$.

3 Classe TC^0

La classe TC^0 correspond à la classe des langages sur $\{0,1\}$ décidés par une famille de circuits où les portes sont $\neg$ ainsi que des portes de type $T_k(x_1, \ldots, x_n)$ avec $T_k(x_1, \ldots, x_n) = |\{i \mid x_i = \top\}| \geq k$.

Exercice 8. Montrer que tout circuit avec des portes $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et MAJ, où $\mathrm{MAJ}(x_1, \dots, x_n) = \top$ quand la moitié de ses entrées au moins (c'est-à-dire au moins $\lceil n/2 \rceil$ de celles-ci) sont à $\top$, se réécrit comme un circuit de même profondeur avec des portes $\neg$ et T_k.

Exercice 9. Montrer qu'à l'inverse TC^0 correspond aussi à la classe des langages sur $\{0, 1\}$ décidés par des circuits de profondeur bornée avec les portes $\wedge$, $\vee$, $\neg$ et MAJ (d'arités non bornées).

Exercice 10. Montrer que $\mathsf{TC}^0 \subseteq \mathsf{NC}^1$.

Exercice 11. Montrer que PARITY $\in \mathsf{TC}^0$.

Exercice 12. Montrer que MULT $\in \mathsf{TC}^0$.