TD 7 – Indécidabilité

1 Indécidabilité et non-reconnaissabilité

Un état $q \in Q$ d'une MT $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$, différent de q_{acc} et q_{rej}, est dit inutile lorsqu'aucun calcul d'une configuration initiale $q_0 w$ pour $w \in \Sigma^*$ ne visite l'état q.

Exercice 1. Montrer que les langages suivants ne sont pas décidables.

1. $\{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M}$ MT normalisée ayant un état inutile$\}$.
2. $\left\{\langle \mathcal{M} \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{M} \text{ MT normalisée qui écrit le symbole blanc au cours de son exécution} \\ \text{sur le mot vide} \end{array}\right\}$.
3. $\left\{\langle \mathcal{M} \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{M} \text{ MT normalisée s'arrêtant sur le mot vide et étant l'une de celles, à états et} \\ \text{alphabets fixés, effectuant le nombre maximal d'étapes avant arrêt} \end{array}\right\}$.

Exercice 2. Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage non décidable sur un alphabet Σ contenant $\{0, 1\}$. Soit le langage $K = 0L \cup 1\bar{L}$. Montrer que le langage K et son complémentaire $\bar{K}$ ne sont pas reconnaissables.

2 Castors affairés

Le problème des « castors affairés » (« busy beavers ») a été introduit par Radó, dans le but de définir « simplement » une fonction non calculable. Le modèle de MT considéré est le suivant : on suppose les machines déterministes, possédant un ruban bi-infini, un alphabet réduit à $\{0, 1\}$ (on ne distingue pas 0 du symbole blanc). On suppose de plus que les machines possèdent un unique état final, duquel aucune transition ne sort, et qui n'est pas compté parmi les états de la machine. Enfin, on considérera toujours un ruban initialement complètement blanc et l'on suppose qu'il existe un état d'arrêt duquel ne part aucune transition.

La fonction du castor affairé, notée $\Sigma(n)$, est définie comme le nombre maximum de 1 écrits sur la bande (pas nécessairement consécutifs) après qu'une MT telle que décrite ci-dessus à $n + 1$ états (n états d'opération et un état d'arrêt) atteigne l'état d'arrêt.

Exercice 3. Justifier que $\Sigma(n)$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Que valent $\Sigma(0)$, $\Sigma(1)$, $\Sigma(2)$? (Plus simplement, montrer que $\Sigma(2) \geq 4$.)

Exercice 5. Montrer que la fonction Σ est strictement croissante.

Le modèle de fonction calculable considéré est le suivant : f est calculable si et seulement s'il existe une machine de Turing qui, sur un ruban contenant initialement n symboles 1 consécutifs à droite du symbole blanc de départ, s'arrête après un nombre fini de déplacements en produisant un bloc de $f(n)$ symboles 1 consécutifs.

Exercice 6. Montrer que la fonction Σ du castor affairé croit strictement plus vite que toute fonction calculable f (c'est-à-dire, $f(n) \in o(\Sigma(n))$).

3 Quines

Pour deux MT A et B on note $A \cdot B$ une MT qui exécute B après avoir exécuté A.

Pour chaque mot $w \in \Sigma^*$, soit P_w une MT sur Σ qui écrit le mot w sur le ruban en utilisant $|w|$ états non finaux, l'état $i \in [\![1, |w|]\!]$ écrivant w_i.

Exercice 7. Expliquer pourquoi la fonction $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est récursive (c'est-à-dire, calculable).

$$q(n) = \begin{cases} \langle P_w \rangle & \text{s'il existe } w \in \Sigma^* \text{ tel que } n = \langle w \rangle \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 8. Expliquer pourquoi la fonction $s_2(m, n)\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est récursive.

$$s_2(m, n) = \begin{cases} \langle A \cdot B \rangle & \text{s'il existe } A, B \text{ telles que } \langle A \rangle = m \wedge \langle B \rangle = n \\ \perp & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 9. En déduire qu'il existe une MT $\mathcal{M}$ qui s'arrête après avoir écrit $\langle \mathcal{M} \rangle$ sur la bande.