

TD 8 – Indécidabilité, le retour

1 Décidabilité et grammaires algébriques

Soit Σ un alphabet. Étant donné $m \in \mathbb{N}_{>0}$ et une suite $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ de m mots sur Σ , on introduit un nouvel alphabet $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ disjoint de Σ et on définit

$$L_u = \{u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n} a_{i_n} \cdots a_{i_2} a_{i_1} \mid n \in \mathbb{N}_{>0} \wedge \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i_j \in \llbracket 1, m \rrbracket\} ,$$
$$L'_u = \{w a_{i_n} \cdots a_{i_2} a_{i_1} \mid n \in \mathbb{N} \wedge \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i_j \in \llbracket 1, m \rrbracket \wedge w \in \Sigma^* \wedge w \neq u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_n}\} \cup \{\varepsilon\} .$$

Exercice 1. Montrer que les langages ainsi définis sont algébriques (« context-free »).

Exercice 2. Montrer, en utilisant l'indécidabilité de PCP, que les langages suivants sont indécidables.

1. $\text{DISJ}_{\text{CFG}} = \{\langle \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \rangle \mid \mathcal{G}_1 \text{ et } \mathcal{G}_2 \text{ sont des grammaires algébriques et } \mathcal{L}(\mathcal{G}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{G}_2) = \emptyset\}$.
2. $\text{EQ}_{\text{CFG}} = \{\langle \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \rangle \mid \mathcal{G}_1 \text{ et } \mathcal{G}_2 \text{ sont des grammaires algébriques et } \mathcal{L}(\mathcal{G}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{G}_2)\}$.
3. $\text{ALL}_{\text{CFG}} = \{\langle \mathcal{G} \rangle \mid \mathcal{G} \text{ est une grammaire algébrique sur un alphabet } \Sigma \text{ et } \mathcal{L}(\mathcal{G}) = \Sigma^*\}$.
4. $\text{REG}_{\text{CFG}} = \{\langle \mathcal{G} \rangle \mid \mathcal{G} \text{ est une grammaire algébrique et } \mathcal{L}(\mathcal{G}) \text{ est rationnel}\}$.
5. $\text{IDEM}_{\text{CFG}} = \{\langle \mathcal{G} \rangle \mid \mathcal{G} \text{ est une grammaire algébrique et } \mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L}(\mathcal{G})\mathcal{L}(\mathcal{G})\}$.

Exercice 3. Montrer que

1. $\{\langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle \mid \mathcal{G} \text{ est une grammaire algébrique, } \mathcal{A} \text{ est un AFD et } \mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G})\}$ est indécidable ;
2. $\{\langle \mathcal{G}, \mathcal{A} \rangle \mid \mathcal{G} \text{ est une grammaire algébrique, } \mathcal{A} \text{ est un AFD et } \mathcal{L}(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})\}$ est décidable.

2 Séparabilité

Exercice 4. Soit Σ un alphabet. Soit A et B deux langages disjoints sur Σ . On dit qu'un langage C sur Σ *sépare* A et B lorsque $A \subseteq C$ et $B \subseteq \bar{C}$.

1. Si deux langages A et \bar{A} sur Σ ne sont séparés par aucun langage décidable, que peut-on en déduire ?
2. Montrer que deux langages A et B sur Σ sont séparés par un langage décidable s'ils sont reconnaissables et disjoints.
3. Montrer qu'il existe des langages A et B sur Σ qui sont reconnaissables, mais ne sont séparés par aucun langage décidable.