TD 1 – Langages, AFD et AFN

1 Construction d'AFD

Exercice 1. Pour chacun des langages suivants, donner un automate fini déterministe (AFD) le reconnaissant.

1. Les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ contenant le facteur aab ou $aaab$.
2. Les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ contenant un nombre pair de a et impair de b.
3. Les mots sur l'alphabet $\{a\}$ de longueur multiple de 3.
4. Pour chaque $d \in \mathbb{N}$ les mots sur l'alphabet $\{a\}$ de longueur multiple de d.
5. Les représentations binaires d'entiers pairs. Ici entier est entendu au sens positif et les nombres sont donnés dans l'ordre gros-boutiste (c'est-à-dire l'ordre normal de lecture des nombres : 1 puis 0 puis 1 puis 0 puis 1 puis 0 c'est le nombre binaire 101010 soit 42 en décimal).
6. Pour chaque $d \in \mathbb{N}$, les représentations binaires des entiers multiples de d.
7. Pour chaque $(d, c) \in \mathbb{N}^2$, les représentations binaires des entiers de la forme $c + k \cdot d$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2 Puzzles

Exercice 2. Pour tout alphabet Σ, donner l'ensemble des mots $(x, y) \in (\Sigma^*)^2$ tels que $xy = yx$.

Exercice 3. Expliciter la forme des langages rationnels unaires (c'est-à-dire, sur un alphabet à une lettre).

3 Rationalité

Exercice 4. Étant donné un langage rationnel L sur un alphabet Σ, prouver que les langages suivants sont rationnels.

1. $Init(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*, uv \in L\}$.
2. $Min(L) = \{w \in L \mid \nexists u \in L, u \text{ préfixe propre de } w\}$.
3. $Max(L) = \{w \in L \mid \forall u \in \Sigma^*, wu \in L \Rightarrow u = \varepsilon\}$.
4. $Cycle(L) = \{uv \in \Sigma^* \mid vu \in L\}$.
5. $\frac{1}{2}L = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^*, uv \in L \wedge |v| = |u|\}$.

4 Caractérisations

Soit Σ un alphabet.

Étant donné un AFD $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, un état $q \in Q$ est dit *co-accessible* si et seulement s'il existe $w \in \Sigma^*$ vérifiant $\hat{\delta}(q, w) \in F$; il est appelé *puits* lorsque $\delta(q, a) = q$ pour tout $a \in \Sigma$. On dira de plus que q se *trouve dans un circuit* lorsqu'il existe $w \in \Sigma^+$ tel que $\hat{\delta}(q, w) = q$.

Exercice 5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un langage sur Σ soit reconnu par un AFD dont les états co-accessibles non puits ne se trouvent dans aucun circuit.

Exercice 6. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un AFD sur Σ reconnaisse un langage fini ou cofini.