TD 10 – NP-complétude

1 Variations autour de SAT

Une *formule booléenne* φ est construite à partir d'un ensemble de variables $x_1, \ldots, x_n$ (pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$) et des connecteurs logiques $\wedge$ (ET), $\vee$ (OU) et $\neg$ (NON). Elle est satisfaisable lorsqu'il existe une assignation des variables $x_1, \ldots, x_n$ à vrai ($\top$) ou faux ($\bot$) telle que φ s'évalue à vrai en utilisant les règles habituelles d'évaluation des connecteurs logiques.

On rappelle que

$$\mathrm{SAT} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ est une formule booléenne satisfaisable}\}$$

est NP-complet.

Une formule *CNF* (pour *Conjunctive Normal Form*) est une formule booléenne φ sur un ensemble de variables $x_1, \ldots, x_n$ (pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$) de la forme $\bigwedge_{j=1}^{m} C_j$ avec $m \in \mathbb{N}_{>0}$, où chaque C_j est une *clause*, c'est-à-dire une disjonction de *littéraux* (un littéral étant soit une variable x_i, soit la négation d'une variable $\neg x_i$) de la forme $C_j = \bigvee_i v_i^j$ où $v_i^j = x_l$ ou $v_i^j = \neg x_l$ pour un certain l.

On pose

$$\mathrm{CNF\text{-}SAT} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ est une formule CNF satisfaisable}\}\ .$$

Exercice 1. Montrer que CNF-SAT est NP-complet.

Le problème k-SAT est le problème CNF-SAT où l'on impose que chaque clause contienne au plus k littéraux.

Pour tout $k \in \mathbb{N}_{>0}$, on pose

$$\mathrm{k\text{-}SAT} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ est une formule CNF satisfaisable où chaque clause a au plus } k \text{ littéraux}\}\ .$$

Exercice 2. Montrer que 3-SAT est NP-complet.

Exercice 3. Montrer que 2-SAT $\in$ P.

Une formule *DNF* (pour *Disjunctive Normal Form*) est une formule booléenne φ sur un ensemble de variables $x_1, \ldots, x_n$ (pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$) de la forme $\bigvee_{j=1}^{m} M_j$ avec $m \in \mathbb{N}_{>0}$, où chaque M_j est un *monôme*, c'est-à-dire une conjonction de littéraux de la forme $M_j = \bigwedge_i v_i^j$ où $v_i^j = x_l$ ou $v_i^j = \neg x_l$ pour un certain l.

On pose

$$\mathrm{DNF\text{-}SAT} = \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi \text{ est une formule DNF satisfaisable}\}\ .$$

Exercice 4. Dans lesquelles des classes NP, coNP et P le langage DNF-SAT se trouve-t-il ?

2 Quelques problèmes sur les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

Une *clique de taille* $k \in \mathbb{N}_{>0}$ dans G est un sous-graphe induit (S, E') de G (où $E' = \big\{\{x, y\} \in E \bigm| x, y \in S\big\}$) tel que toute paire de sommets qu'il contient est adjacente, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in S$, on a $\{x, y\} \in E$.

Un *ensemble indépendant de taille* $k \in \mathbb{N}_{>0}$ dans G est un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ de cardinal k tel qu'aucune paire de sommets qu'il contient est adjacente, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in S$, on a $\{x, y\} \notin E$.

Une *couverture par sommets de taille* $k \in \mathbb{N}_{>0}$ dans G est un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ de cardinal k tel que toute arête de G est incidente à un sommet de S, c'est-à-dire que pour tout $\{x, y\} \in E$, on a $x \in S$ ou $y \in S$.

Un *ensemble dominant de taille* $k \in \mathbb{N}_{>0}$ dans G est un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ de cardinal k tel que tout sommet de G appartient à S ou est adjacent à un sommet de S, c'est-à-dire que pour tout $x \in V$, on a $x \in S$ ou il existe $y \in S$ tel que $\{x, y\} \in E$.

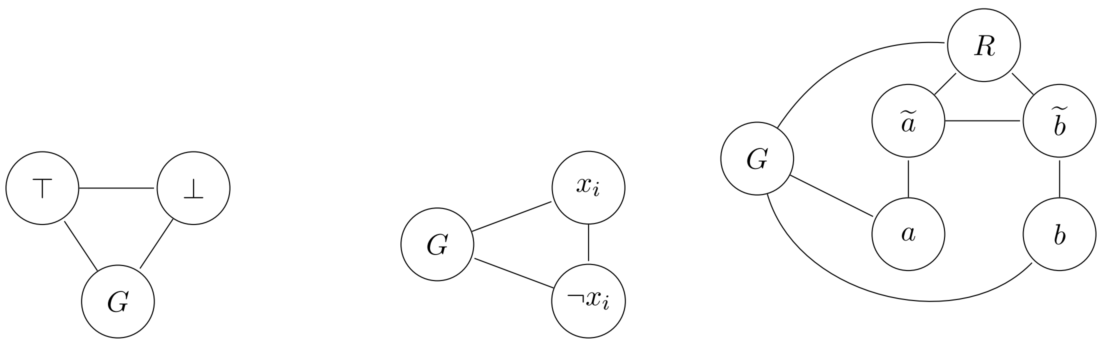
Exercice 5. Montrer que les langages suivants sont NP-complets.

1. $\text{CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid G \text{ est un graphe non orienté contenant une clique de taille au moins } k\}$.
2. $\text{INDEPENDENT-SET} = \left\{\langle G, k\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ est un graphe non orienté contenant un ensemble} \\ \text{indépendant de taille au moins } k \end{array}\right\}$.
3. $\text{VERTEX-COVER} = \left\{\langle G, k\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ est un graphe non orienté contenant une converture par} \\ \text{sommets de taille au plus } k \end{array}\right\}$.
4. $\text{DOMINATING-SET} = \left\{\langle G, k\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ est un graphe non orienté contenant un ensemble} \\ \text{dominant de taille au plus } k \end{array}\right\}$.

3 Coloriage

Exercice 6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}_{>0}$, si $(k+1)$-COL $\in \mathsf{P}$, alors k-COL $\in \mathsf{P}$.

Nous allons maintenant montrer que 3-SAT se réduit à 3-COL. Pour cela nous allons introduire plusieurs gadgets.



(a) Gadget de couleur (b) Gadget de littéraux (c) Gadget OR

Gadget de couleurs Dans notre graphe, les trois couleurs vont représenter soit vrai ($\top$), faux ($\bot$) ou autre (G pour Ground). Pour encoder ces couleurs, notre premier gadget est d'inclure le graphe de la figure 1a. Nous brancherons ensuite souvent des sommets à G ou $\bot$ pour interdire ces couleurs, il s'agira toujours de ces mêmes sommets G et $\bot$ (le gadget n'est présent qu'une seule fois même si ses sommets sont utilisés dans les autres gadgets).

Exercice 7. Trouver un gadget qui impose qu'un sommet soit colorié de la même couleur que $\top$.

Gadget de littéraux Pour chaque variable x_i nous allons créer deux sommets x_i et $\neg x_i$ que nous allons brancher à G et entre eux selon le schéma de la figure 1b.

Gadget OR Supposons que a et b représentent des valeurs booléennes (ce que l'on force en les branchant à G), le gadget OR est celui de la figure 1c (le G est celui du premier gadget).

Exercice 8. Montrer que dans tout coloriage du gadget, la couleur de R est la même que celle de a ou la même que celle de b et que, si ces couleurs sont différentes, alors R peut avoir l'une ou l'autre des couleurs, selon le coloriage.

Exercice 9. Trouver un gadget qui réalise le OR entre trois valeurs booléennes a, b, c (représentées par des sommets coloriés de la même couleur que $\top$ ou $\bot$).

Preuve finale Nous allons maintenant tout rassembler pour construire la réduction de 3 - SAT à 3 - COL.

Exercice 10. Trouver un gadget pour vérifier chacune des clauses.

Exercice 11. Donner une réduction polynomiale de 3 - SAT à 3 - COL.

4 Chemin hamiltonien

Dans un graphe G, qu'il soit orienté ou non orienté, un chemin de s à t dans G est dit *hamiltonien* lorsque le chemin passe exactement une fois par chaque sommet du graphe.

On pose

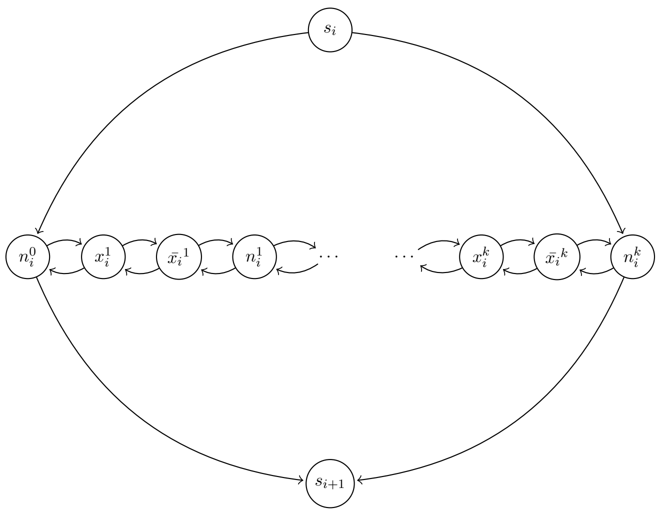
$$\text{HAMPATH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ est un graphe orienté contenant un chemin hamiltonien de } s \text{ à } t\}\ .$$

Exercice 12. Montrer que HAMPATH est NP-complet.

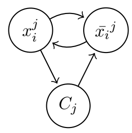
Suggestion : partir d'une formule CNF à k clauses $C_1, \ldots, C_k$ et l variables $x_1, \ldots, x_l$ et construire un graphe qui contient :

- *pour x_i une variable, trois sommets x_i^j, $\bar{x}_i^j$ et n_i^j pour chaque clause C_j et deux sommets s_i et n_i^0 ;*
- *pour C_j une clause, un sommet C_j ;*
- *un sommet s_{l+1} ;*

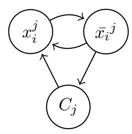
et utilise les gadgets suivants :



(a) Gadget de variable



(b) Gadget pour x_i utilisé dans C_j



(c) Gadget pour $\bar{x}_i$ utilisé dans C_j.

On pose à présent

$$\text{UHAMPATH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid G \text{ est un graphe non orienté contenant un chemin hamiltonien de } s \text{ à } t\}\ .$$

Exercice 13. Montrer que UHAMPATH est également NP-complet.