TD 12 – Circuits

1 Classe AC

Un circuit booléen avec n bits d'entrée est un graphe orienté acyclique (DAG) où les feuilles sont soit une des variables d'entrée x_i ($i \in [\![1, n]\!]$) soit une constante $\top$ ou $\bot$, la sortie est l'unique nœud dont le degré sortant est nul et chaque nœud est soit un nœud $\wedge$ ou $\vee$ (qui peuvent être d'arité quelconque) soit un nœud $\neg$ (unaire). Étant donné un mot $w \in \{0, 1\}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et un circuit booléen dont la taille d'entrée est n, on peut évaluer le circuit sur w en remplaçant la i-ème feuille d'entrée par $\top$ quand $w_i = 1$ et $\bot$ quand $w_i = 0$. Un tel circuit décide donc le langage des mots de $\{0, 1\}^n$ sur lesquels il s'évalue à $\top$.

On dit qu'une *famille de circuits* $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décide un langage $L \subseteq \{0, 1\}^*$ lorsque pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le circuit C_n a n bits d'entrée et décide $L \cap \{0, 1\}^n$.

On définit la classe AC^i pour $i \in \mathbb{N}$ comme la classe des langages sur $\{0, 1\}$ décidés par une famille de circuits booléens $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la taille est polynomiale et dont la profondeur est en $\mathrm{O}(\log(n)^i)$, c'est à dire qu'il existe un polynôme p et un entier k tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la taille de C_n est majorée par $p(n)$ et la profondeur de C_n est majorée par $k \cdot \log(n)^i$.

Exercice 1. Justifier que l'on ne s'intéresse qu'aux circuits de taille polynomiale (et non pas exponentielle ou illimitée).

Exercice 2. Montrer que le langage $\text{PARITY} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid |w|_1 = 1 \mod 2\}$ est dans AC^1.

Exercice 3. Montrer que le langage

$$\text{ADD} = \{abc \in \{0, 1\}^* \mid |a| + 1 = |b| + 1 = |c|,\ a + b = c \text{ avec } a, b, c \text{ en binaire petit-boutiste}\}$$

est dans AC^0.

Exercice 4. Montrer que le langage

$$\text{MULT} = \{abc \in \{0, 1\}^* \mid 2\,|a| = 2\,|b| = |c|,\ a \cdot b = c \text{ avec } a, b, c \text{ en binaire petit-boutiste}\}$$

est dans AC^1.

Exercice 5. Montrer que tout langage rationnel sur $\{0, 1\}$ est dans AC^1.

2 Classe NC

On note NC^i la classe des langages sur $\{0, 1\}$ décidés par une famille de circuits booléens $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont la taille est polynomiale et dont la profondeur est en $\mathrm{O}(\log(n)^i)$, mais où l'arité des portes $\vee$ et $\wedge$ est limitée à 2.

Exercice 6. Montrer que pour tout i nous avons l'inclusion $\mathsf{NC}^\mathsf{i} \subseteq \mathsf{AC}^\mathsf{i} \subseteq \mathsf{NC}^{\mathsf{i+1}}$.

Exercice 7. Montrer que $\mathsf{NC}^0 \neq \mathsf{AC}^0$.

3 Classe TC^0

La classe TC^0 correspond à la classe des langages sur $\{0, 1\}$ décidés par une famille de circuits booléens dont la taille est polynomiale et dont la profondeur est en $\mathrm{O}(1)$, où les portes sont $\neg$ ainsi que des portes de seuil $\mathrm{T_k}$ d'arité non bornée pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait que $\mathrm{T_k}(x_1, \ldots, x_n)$ s'évalue à $\top$ quand k de ses entrées au moins s'évaluent à $\top$.

Exercice 8. Montrer que tout circuit avec des portes $\neg$ ainsi que $\wedge$, $\vee$ et MAJ d'arité non bornée, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait que $\mathrm{MAJ}(x_1, \ldots, x_n)$ s'évalue à $\top$ quand la moitié de ses entrées au moins (c'est-à-dire au moins $\lceil n/2 \rceil$ de celles-ci) s'évaluent à $\top$, se réécrit comme un circuit de même taille et profondeur avec des portes $\neg$ et $\mathrm{T_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque décidant le même langage.

Exercice 9. Montrer qu'à l'inverse, TC^0 se définit aussi comme la classe des langages sur $\{0, 1\}$ décidés par une famille de circuits booléens dont la taille est polynomiale et dont la profondeur est en $\mathrm{O}(1)$, où les portes sont $\neg$ ainsi que $\wedge$, $\vee$ et MAJ d'arité non bornée.

Exercice 10. Montrer que $\mathsf{TC}^0 \subseteq \mathsf{NC}^1$.

Exercice 11. Montrer que PARITY $\in \mathsf{TC}^0$.

Exercice 12. Montrer que MULT $\in \mathsf{TC}^0$.