TD 6 – Machines de Turing

1 Décision de langages et calcul de fonctions par des machines de Turing

Exercice 1. Pour chacun des langages suivants, donner (explicitement, avec tous les détails) une machine de Turing (MT) le décidant.

1. $\{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^{\mathcal{R}}\}$ (langage des palindromes sur $\{a,b\}$).
2. $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
3. $\{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$.

Une MT $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ qui est un décideur peut également être vue comme *calculant* la fonction $f\colon \Sigma^* \to \mathrm{T}^*$ telle que $\mathrm{T} \subseteq \Gamma$ et pour tout $w \in \Sigma^*$, $f(w) = uv$ où $q_0 w \vdash^*_{\mathcal{M}} u q_{\text{acc}} v$ ou $q_0 w \vdash^*_{\mathcal{M}} u q_{\text{rej}} v$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel, on dénote par $\langle n \rangle$ sa représentation binaire gros-boutiste.

Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, donner (explicitement, avec tous les détails) une MT la calculant.

1. La fonction $r\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ telle que, pour tout $w \in \{0,1\}^*$, $r(w) = w^{\mathcal{R}}$. (C'est une fonction renversant une chaîne de bits.)
2. La fonction $s\colon \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*$ telle que, pour tout $w \in \{0,1,\#\}^*$,
$$s(w) = \begin{cases} \langle n_1 + n_2 \rangle & \text{si } w = \langle n_1 \rangle \# \langle n_2 \rangle \text{ pour } n_1, n_2 \in \mathbb{N} \\ \varepsilon & \text{sinon .} \end{cases}$$
(C'est une fonction additionnant deux entiers.)
3. Étant donné deux fonctions $f_1\colon \Sigma^* \to \Gamma^*$ et $f_2\colon \Gamma^* \to \mathrm{T}^*$ (où $\Sigma, \Gamma, \mathrm{T}$ sont des alphabets) calculées respectivement par les MT $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, la fonction $f_2 \circ f_1\colon \Sigma^* \to \mathrm{T}^*$ composition de f_1 et f_2.

2 Reconnaissance de langages par des machines de Turing

On appellera dans la suite *MT normalisée*, une MT $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, q_2, q_3)$ telle que $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_l\}$ avec $l \in \mathbb{N}, l \geq 1$ et $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_l, a_{l+1}, \ldots, a_k\}$ avec $k \in \mathbb{N}, k \geq l+1$, où a_k correspond au symbole blanc. Il n'est pas difficile de voir qu'à toute MT on peut (de manière non unique) associer une MT normalisée ayant exactement le même comportement.

Exercice 3. Proposer un encodage $\langle \cdot \rangle$ pour les MT normalisées, c'est-à-dire, une application qui à toute MT normalisée $\mathcal{M}$ associe un mot $\langle \mathcal{M} \rangle$ sur $\{0,1\}$ de manière injective et vérifiant qu'il existe une MT universelle pour cet encodage, c'est-à-dire, reconnaissant le langage des mots $\langle \mathcal{M} \rangle \# w$ où $\mathcal{M}$ est une MT et $w \in \{0,1\}^*$ encode un mot sur l'alphabet d'entrée de $\mathcal{M}$ que cette dernière accepte.

Exercice 4. Pour chacun des langages suivants, décrire, sans donner tous les détails, une MT le reconnaissant.

1. $\{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ MT normalisée s'arrêtant sur le mot vide}\}$.
2. $\{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M} \text{ MT normalisée telle que } \mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \emptyset\}$.

3 Équivalence de modèles

Soit les variantes suivantes de MT.

— Une machine à $k \in \mathbb{N}_{>0}$ piles est une MT avec une bande d'entrée en lecture seule et k bandes de travail, où les bandes de travail sont remplacées par des piles (on peut ajouter et lire uniquement tout à droite).

— Une machine à file est une MT avec une bande d'entrée en lecture seule et une bande de travail, où la bande de travail est remplacée par une file (on peut ajouter uniquement tout à droite et lire uniquement tout à gauche).

— Une machine à $k \in \mathbb{N}_{>0}$ compteurs est une machine à k piles où l'alphabet de pile est $\{B, Z\}$ et Z est un symbole de fond de pile. Un entier i peut être stocké dans une pile en comptant le nombre de symboles B. On peut incrémenter, décrémenter le compteur et tester si le compteur est vide (symbole Z en tête de pile).

Exercice 5. Prouver les énoncés suivants, sans donner tous les détails.

1. Une MT est équivalente à une machine à deux piles.
2. Un MT est équivalente à une machine à une file.
3. Une machine à une pile peut être simulée par une machine à deux compteurs.
4. Une MT est équivalente à une machine à deux compteurs.