TD 7 – Indécidabilité

1 Indécidabilité et non-reconnaissabilité

Un état $q \in Q$ d'une MT $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$, différent de q_{acc} et q_{rej}, est dit inutile lorsqu'aucun calcul d'une configuration initiale $q_0 w$ pour $w \in \Sigma^*$ ne visite l'état q.

Exercice 1. Montrer que les langages suivants ne sont pas décidables.

1. $\{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{M}$ MT normalisée ayant un état inutile$\}$.
2. $\left\{\langle \mathcal{M} \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l}\mathcal{M} \text{ MT normalisée qui écrit le symbole blanc au cours de son exécution} \\ \text{sur le mot vide}\end{array}\right\}$.
3. $\left\{\langle \mathcal{M} \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l}\mathcal{M} \text{ MT normalisée s'arrêtant sur le mot vide et étant l'une de celles, à états et} \\ \text{alphabets fixés, effectuant le nombre maximal d'étapes avant arrêt}\end{array}\right\}$.

Exercice 2. Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage non décidable sur un alphabet Σ contenant $\{0, 1\}$. Soit le langage $K = 0L \cup 1\bar{L}$. Montrer que le langage K et son complémentaire $\bar{K}$ ne sont pas reconnaissables.

2 Castors affairés

Le problème des « castors affairés » (« busy beavers ») a été introduit par Radó, dans le but de définir « simplement » une fonction non calculable. Le modèle de MT considéré est le suivant : on suppose les machines déterministes, possédant un ruban bi-infini, un alphabet réduit à $\{0, 1\}$ (on ne distingue pas 0 du symbole blanc). On suppose de plus que les machines possèdent un unique état final, que nous appellerons *état d'arrêt*, duquel aucune transition ne sort, et qui n'est pas compté parmi les états de la machine. Enfin, on considérera toujours un ruban initialement complètement blanc.

La fonction du castor affairé $\Sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie comme donnant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre maximum de 1 écrits sur la bande (pas nécessairement consécutifs) après qu'une MT telle que décrite ci-dessus à $n + 1$ états (n états d'opération et un état d'arrêt) atteigne l'état d'arrêt.

Exercice 3. Justifier que $\Sigma(n)$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Que valent $\Sigma(0)$, $\Sigma(1)$, $\Sigma(2)$? (Plus simplement, montrer que $\Sigma(2) \geq 4$.)

Exercice 5. Montrer que la fonction Σ est strictement croissante.

Considérons la définition suivante de fonction sur les entiers naturels calculable : $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est calculable si et seulement s'il existe une MT qui, sur un ruban contenant initialement n symboles 1 consécutifs à droite du symbole blanc de départ, s'arrête sur ce symbole après un nombre fini d'étapes avec un bloc de $f(n)$ symboles 1 consécutifs à droite du symbole blanc de départ.

Exercice 6. Montrer que la fonction Σ du castor affairé croit strictement plus vite que toute fonction calculable f (c'est-à-dire, $f(n) \in \mathrm{o}(\Sigma(n))$).

3 Quines

Pour deux MT A et B on note $A \cdot B$ une MT qui exécute B après avoir exécuté A.

Étant donné un alphabet normalisé Σ (alphabet d'entrée d'une MT normalisée), on suppose avoir une fonction d'encodage $\langle \cdot \rangle \colon \Sigma^* \to \{0, 1\}^*$ pour les mots sur Σ associée à la fonction d'encodage pour les MT normalisées. Pour chaque mot $w \in \Sigma^*$, il existe P_w une MT normalisée avec Σ pour alphabet d'entrée qui écrit le mot w sur le ruban en utilisant $|w|$ états non finaux, l'état $i \in [\![1, |w|\,]\!]$ permettant d'écrire w_i.

Exercice 7. Étant donné un alphabet normalisé Σ, expliquer pourquoi la fonction $q\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ telle que

$$q(u) = \begin{cases} \langle P_w \rangle & \text{s'il existe } w \in \Sigma^* \text{ tel que } u = \langle w \rangle \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases},$$

pour tout $u \in \{0,1\}^*$ est calculable.

Exercice 8. Expliquer pourquoi la fonction $s_2\colon \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*$ telle que

$$s_2(u) = \begin{cases} \langle A \cdot B \rangle & \text{s'il existe } A, B \text{ MT normalisées telles que } u = \langle A \rangle \# \langle B \rangle \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $u \in \{0,1,\#\}^*$ est calculable.

Exercice 9. En déduire qu'il existe une MT $\mathcal{M}$ qui, sur le mot vide, s'arrête après avoir écrit $\langle \mathcal{M} \rangle$ sur la bande.